**BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ**

*№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2005*

# О РАВНОМЕРНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ СЕМЕЙСТВА МОМЕНТОВ ПЕРВОГО ВЫХОДА СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ ЗА НЕЛИНЕЙНУЮ ГРАНИЦУ

**Ф.Г. РАГИМОВ**

***Бакинский Государственный Университет***

*В настоящей работе рассматривается семейство моментов первого выхода случайного блуждания за нелинейную границу. Изучается вопрос равномерной интегрируемости разности между линейным и нелинейным моментами остановки. В частности, найдены асимптотические формулы для среднего значения и дисперсии нелинейного момента остановки.*

**1.Введение.** Пусть $\xi_n$, $n \geq 1$-последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\mu = E\xi_1 > 0$, определенных на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, P)$. Положим при $n \geq 1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k ,$$

$$\tau = \tau_a = \inf\{n \geq 1 : \quad S_n \geq f_a(n)\},$$

и при $c \geq 0$ и $s \leq \mu$

$$\nu = \nu(c,s) = \inf\{n \geq 1 : \ S_n - ns > c\},$$

$$|\tau - \nu| = \Delta_a(c,s) \equiv \Delta ,$$

где $f_a(t),\ a > 0,\ t > 0$-семейство некоторых нелинейных границ, как обычно, будем считать, что $\inf\{\varnothing\} = \infty$.

В теории граничных задач для случайных блужданий большое внимание уделяется изучению равномерной интегрируемости семейства граничных функционалов ([1], [2], [4]). В работе [2] при конечности абсолютного момента высшего порядка случайной величины $\xi_1$ изучается вопрос равномерной интегрируемости семейства $|\tau - \nu|^r$ для некоторого $r \geq 1$ при надлежащем выборе $c = c(a)$ и $s = s(a)$.

Целью настоящей статьи является изучение равномерной интегрируемости семейства $\Delta^r = |\tau - \nu|^r$ для широкого, чем в работе [2], класса случайных величин и нелинейных границ, а также получение асимптотических формул для числовых характеристик $\tau_a$. Метод, используемый в настоящей работе, примыкает по содержанию аналитической техники к методу работы [2].

**2.Условия и обозначения.** Будем предполагать, что $\mu = E\xi_1 > 0$ и граница $f_a(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Для каждого $a$ функция $f_a(t)$ монотонно возрастает, дважды непрерывно-дифференцируема при $t > 0$, причем $f_a(t) \uparrow \infty$, $a \to \infty$.

2. $n = n(a) \to \infty$ при $a \to \infty$ таким образом, что

$$f_a(n) \to \mu \text{ и } f'_a(n) \to \theta \in [0, \mu).$$

3. Для каждого $a$ функция $f'_a(t)$ слабо осциллируется в бесконечности, т.е.

$$\frac{f'_a(n)}{f'_a(m)} \to 1 \text{ при } \frac{n}{m} \to 1, \ n \to \infty.$$

4.Для достаточно больших $a$ и для любого $k > 0$

$$\sup_{t:|t-N_a| \le kN_a^{\alpha}} \left\{ \left| N_a f''_a(t) \right| \right\} \le M < \infty,$$

где $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ и $M > 0$ -некоторая константа и $N_a = N_a(\mu)$ -решение уравнения $f_a(n) = n\mu$ [5].

Уместно отметить, что в работе [4] показано, что семейство $\left\{ \frac{\tau_a}{N_a}, a > 0 \right\}$ является равномерно интегрируемым.

### 3. Формулировка основного результата.

**Теорема.** Пусть выполняются выше перечисленные условия 1-4 и существуют константы $0<\delta<1$ и $\mu^* < \mu$, такие, что $f'_a(t) \le \mu^*$ для $t \ge \delta N_a$. Кроме того, пусть $E\left(\xi_1^+\right)^{2r} < \infty$, $\xi_1^+ = \max(0, \xi_1)$ и $N_a^r P\left(\tau_a \le \delta N_a\right) \to 0$ при $a \to \infty$ для некоторого $r \ge 1$.
Тогда семейство $\Delta^r$ является равномерно интегрируемым.

**Следствие.** При выполнении условий теоремы имеет место:

$$E\tau_a = N_a + O(1).$$

Если $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, то $D\tau_a = (\mu - \theta)^{-2}\sigma^2 N_a + O(\sqrt{N_a})$.

Это следствие уточняет результаты работы [4].

**Доказательство теоремы.** Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы. Не нарушая общности, будем пологать, что $\mu = 1$.

**Лемма 1.** Пусть $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ и $r \ge 1$.

1) Если $E\left(\xi_1^+\right)^{r_1} < \infty,\ r_1 = \dfrac{r+1}{\alpha}$, то для любого $u > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\max_{i \le n}(S_i - i) \ge un^{\alpha}\right\} < \infty$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\sup_{i \ge n} i^{-\alpha}(S_i - i) \ge u\right\} < \infty .$$

2) Если $c^{r_1} P\left\{\xi_1 \ge c\right\} \to 0,\ c \to \infty$, то для любого $u > 0$ и $K > 0$

$$\sup_{K^{-1} \le 1-s \le K} c^{r_1} P\left\{\nu(c,s) \le (1-s)^{-1} c - uc^{\alpha}\right\} \to 0,\ c \to \infty$$

и

$$n^r P\left\{\max_{i \le n}(S_i - i) \ge un^{\alpha}\right\} \to 0,\ n \to \infty .$$

3) Если $E\left(\xi_1^+\right)^{2r} < \infty$, то для любого $K > 0$ семейство

$$\{ \left(\frac{(\nu - (1-s)^{-1}c)^2}{c}\right)^r,\ c \ge 1,\ K^{-1} \le 1 - s \le K \}$$

является равномерно интегрируемым.

Утверждения этой леммы часто применяются в теории случайных блужданий и в теории восстановления. Их доказательства можно найти в [3] (см., также [2] и [6]).

**Лемма 2.** Пусть выполняются условия теоремы. Тогда для любого $u > 0$

$$P(\tau_a \le N_a - uN_a^{\alpha}) = o(N_a^{-r}), \quad a \to \infty .$$

**Доказательство.** На множестве $\{\omega : \delta N_a < n \le N_a - uN_a^{\alpha}\}$ для достаточно больших $a$ имеем:

$$f_a(n) \ge N_a + \mu^*(n - N_a) \ge n + (1-\mu^*)uN_a^{\alpha} .$$

Следовательно, для некоторого $n \in (\delta N_a, N_a)$

$$N_a^r P\{\delta N_a < \tau_a \le N_a - uN_a^{\alpha}\} \le N_a^r P\{S_n > n + (1-\mu^*)uN_a^{\alpha}\} .$$

В силу второй части леммы 1

$$N_a^r P(\tau_a \le N_a - uN_a^{\alpha}) \le N_a^r P(\tau_a \le \delta N_a) + N_{\alpha}^r P\left\{\max_{n \le N_{\alpha}}(S_n - n) \ge u' N_{\alpha}^{\alpha}\right\} = o(1),$$

где $u' = \frac{(1-\mu^*)u}{3}$.

**Лемма 3.** Пусть выполняются выше перечисленные условия 1-4 и существуют константы $0 < \delta < 1$ и $\mu^* < \mu$, такие, что $f'_a(t) \le \mu^*$ для $t \ge \delta N_a$. Если $E\left(\xi_1^+\right)^{r_1} < \infty$, $r_1 = \frac{r+1}{\alpha}$, $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1]$ и $r \ge 1$, то существует константа $K > 0$, такая, что

$$\sum_{n=m_a}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\tau_a > n\right\} \to 0, \ a \to \infty,$$

где $m_a = [N_a + KN_a^{\alpha}]$.

С помощью модификации техники, использованной в работе [2], можно доказать лемму 3; в [2] она доказана при условии $E\left|\xi_1^+\right|^{r_1} < \infty$.

**Лемма 4.** Пусть выполняются условия теоремы. Тогда семейство $\{((\tau_a - \nu_a)^+)^r, \, a > 0\}$ является равномерно интегрируемым.

**Доказательство.** Положим $n_1 = [N_a - uN_a^{\alpha}]$, $n_2 = [N_a + uN_a^{\alpha}]$, $n^* = [N_a + KN_a^{\alpha}]$, $\tau' = \max(n_1, \min(\tau, n^*))$, $\nu' = \max(n_1, \min(\nu, n^*))$.
Для $n \ge n_2$ имеем:

$$P(\tau_a > n) \le P(S_n - \theta \cdot n \le N(1-\theta)) \le P(n - S_n \ge (n-N)(1-\theta)).$$

Из первой части леммы 1 следует, что для любого $u > 0$

$$\sum_{n=n_2}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\nu > n\right\} = 0. \tag{1}$$

Далее, из второй части леммы 1 и из лемм 2 и 3, вытекает, что

$$\lim_{a\to\infty} E\left|\tau - \tau'\right|^r = \lim_{a\to\infty} E\left|\nu - \nu'\right|^r = 0 \tag{2}$$

и $\quad P(\tau' > \nu' + n) \le P(\nu \le n_1) + P(n_1 < \nu < \nu + n < \tau' \le n^*)$.

Из леммы 3 получаем:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\tau' > \nu' + n\right\} = \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P\left\{\tau' > \nu' + n\right\} +$$

$$+ \sum_{n=n^*}^{\infty} n^{r-1} P\left\{\tau' > \nu' + n\right\} = \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P\left\{\tau' > \nu' + n\right\} + o(1) =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{n^*} n^{r-1} P\left\{S_{\nu+n} \le f_a(\nu+n), \, \nu \in (n_1, n^* - n)\right\} + o(1),$$

где $n^* = [N_a + KN_a^{\frac{1}{2}}]$.

На множестве $\{n_1 < \tau \le \tau + n < n^*\}$, в силу условия теоремы, имеем:

$f_a(\nu+n) \le \mu^* n + f_a(\nu)$. Далее, существует константа $0 < M < \infty$, такая, что при $n_1 \le m \le n^*$ выполняется неравенство

$$\left| f_a(m) - N_a - \theta m \right| \le M \frac{(m-N_a)^2}{N_a}. \qquad (3)$$

На множестве $\{\tau' > \nu' + n\}$ имеем:

$$S_{\nu+n} \le \mu^* n + M \frac{(\tau - N_a)^2}{N_a} + M \frac{|\ \nu - N_a\ |}{\sqrt{n_1}} + S_\nu + \frac{n(1-\mu^*)}{5}.$$

С помощью этого неравенства и лемм 1-3, с учетом того, что $E\left(\xi_1^+\right)^{2r} < \infty$, получаем: $\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\tau > \nu' + n\} \to 0,\ a \to \infty$. Отсюда, в силу леммы 3, следует утверждение леммы 4.

**Лемма 5.** Пусть $\xi$ есть целочисленная случайная величина с $E\left(\xi_1^+\right)^r < \infty$, $r \ge 1$ и пусть существуют константы $\gamma, \beta,$ и $\delta$, такие , что $0 \le \delta < 1$, $\beta(4\delta\ )^r \le 2$ и для некоторого $m > \dfrac{1}{1-\delta}$

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1} P\{\xi \le n\} \le \gamma + \beta \sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1} P\{\delta\xi \ge n\} < \infty .$$

Тогда

$$\sum_{n=m}^{\infty} n^{r-1} P\{\xi \ge n\} < 2\gamma .$$

Эта лемма доказывается аналогично лемме 5 из работы [2].

Теперь можно перейти к доказательству утверждения теоремы. Положим $n_1 = [N_a - uN_a^\alpha]$, $n_2 = [N_a + uN_a^\alpha]$,

$$\tau' = \max(n_1, \min(\tau, n_2)),\ \nu' = \max(n_1, \min(\nu, n_2)) .$$

Заметим, что $(\tau - \tau')^+ \le (\tau - \nu)^+ + (\nu - n_2)^+$.

Из леммы 4, с помощью (1) и (2) имеем:

$$\lim_{a\to\infty} E|\tau - \tau'|^r = \lim_{a\to\infty} E|\nu - \nu'|^r = 0 .$$

Нетрудно видеть, что

$$P(\nu' > \tau' + n) \le P(\tau \le n_1) + P(n_1 < \tau < \tau + n < \nu < n_2) + P(\nu \ge n_2) .$$

Далее, в силу леммы 2, из (1) получаем:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\nu' > \tau' + n\} \le \sum_{n=n_0}^{n_2-n_1} n^{r-1} P\{n_1 < \tau \le \tau + n < \nu < n_2\} + o(1) . \qquad (4)$$

На множестве $\{n_1 < \tau \le \tau + n < \nu < n_2\}$

$$S_{\tau+n} \le N_a + \theta\cdot(\tau + n - N_a) \le \mu^* n + N_a + \theta\cdot(\tau - N_a) - f_a(\tau) \le S_\tau + \eta_\tau . \qquad (5)$$

Из условий, наложенных на функцию $f_a(t)$ в доказываемой теореме находим, что для достаточно малых $u$

$$N_a + \theta\cdot(\tau - N_a) - f_a(\tau) - (N_a + \theta\cdot(\nu - N_a) - f_a(\nu)) \le |\nu - \tau| u K N_a^{\alpha-1} .$$

Из (3) следует, что

$$\left| N_a + \theta(\nu - N_a) - f_a(\nu) \right| \le K \frac{(\nu - N_a)^2}{N_a}$$

и

$$\left| N_a + \theta(\tau - N_a) - f_a(\tau) \right| \le \gamma |\nu' - \tau'| + K \frac{(\nu - N_a)^2}{N_a} + K \frac{|\nu - N_a|}{\sqrt{N_a}} ,$$

где $\gamma = uKN_a^{\alpha-1} + KN_a$.

В силу (5), имеем:

$$S_{\tau+n} - S_\tau \le \mu^* n + \gamma|\nu' - \tau'| + K \frac{(\nu - N_a)^2}{N_a} + K \frac{|\nu - N_a|}{\sqrt{N_a}} . \qquad (6)$$

Из (3) и (6) находим, что при $a \to \infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\nu' > \tau' + n\} \le \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{S_\tau + n - S_{\tau+n} \ge u'n\} + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\gamma(\tau - \nu) \ge u'n\} +$$

$$+ \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\gamma(\nu' - \tau') \ge u'n\} + \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\ \{K(\frac{(\nu - N_a)^2}{N_a} + \frac{|\nu - N_a|}{\sqrt{N_a}}) \ge u'n\} + o(1) , \qquad (7)$$

где $u' = \dfrac{1-\mu^*}{5}$.

Выбирая $\beta$ из леммы 5, достаточно малым, так что $\beta(\dfrac{4\delta}{u'})^p \le 2$, из (7) и лемм 1 и 4, имеем:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\nu' > \tau' + n\} \le \sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\delta(\nu' - \tau') \ge u'n\} + o(1) ,\ a \to \infty .$$

С помощью леммы 4 из последнего соотношения и из (6) получаем, что

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{r-1} P\{\nu' > \tau' + n\} = o(1)\,,\ a \to \infty\,.$$

Следовательно, семейство $|\tau - \nu|^r$, $a > 0$ является равномерно интегрируемым.

**Доказательство следствия.** Для доказательства утверждения достаточно отметить, что для линейного момента первого выхода $\nu_a$ с $s = \theta$ и с $c_a = N_a(\mu - \theta)$ имеет место [1]

$$E\nu_a = N_a + O(1) \tag{8}$$

и

$$D\nu_a = (\mu-\theta)^{-3}\sigma^2 c_a + O(\sqrt{c_a}) = (\mu-\theta)^{-2}\sigma^2 N_a + O(\sqrt{N_a})\,. \tag{9}$$

Первое утверждение следствия вытекает из (8) при $r = 1$, а второе утверждение следует из (9) при $r = 2$.

**Замечание.** Из схемы доказательства теоремы следует, что если $f_a''(t) = 0$ для $t \ge \delta N_a$, то для справедливости утверждения теоремы условие $E\left(\xi_1^+\right)^{2r} < \infty$ излишне.

### ЛИТЕРАТУРА


1. Woodroofe M. Nonlinear renewol theory in seqnential analysis. SIAM, 1982, 110p.
2. Zahang C. A nonlinear renewal theory. - Ann Probob. 1988. V 16. №2, pp.793-824.
3. Амосова Н.Н. О вероятностях односторонних уклонений сумм независимых случайных величин.- Мат. заметки, 1978, т. 24, №1, с. 123-131.
4. Рагимов Ф.Г. Об асимптотическом поведении среднего значения и дисперсиии времени пересечения нелинейных границ. BDU-nun xəbərləri.Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası. 1998. №.1, с. 140-143.
5. Рагимов Ф.Г. Асимптотическое разложение распределения времени пересечения нелинейных границ. Теория вероятности и ее примен. 1992. Т.37, с. 580-587.
6. Петров В.В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М., 1987.


## TƏSADÜFİ DOLAŞMANIN İLK DƏFƏ QEYRİ-XƏTTİ SƏRHƏDDƏN KƏNARA ÇIXMASI MOMENTLƏRİ AİLƏSİNİN MÜNTƏZƏM İNTEQRALLANMASI HAQQINDA


**F.H.RƏHİMOV**


### ANNOTASİYA


Bu məqalədə təsadüfi dolaşmanın ilk dəfə qeyri-xətti sərhəddən kənara çıxması momentləri ailəsinə baxılır. Xətti və qeyri-xətti momentlər ailəsinin fərqinin müntəzəm inteqrallanması məsələsi öyrənilir. Xüsusi halda, qeyri-xətti dayanma momentinin orta qiyməti və dispersiyası üçün asimptotik düsturlar alınmışdır.

## ON THE UNIFORM INTEGRABLILITIES OF THE FAMILY OF THE FIRST MOMENT OF RANDOM WALK FOR THE NONLINEAR BOUNDARY

**F.G.RAGIMOV**

**ABSTRACT**

This paper concerns the family of the first moment of random walk for the nonlinear boundary. The uniform integrablilities of the differences of linear and nonlinear stopping moments are studied. In partcular, asymptotic formulas of the mean value and the variance of the nonlinear stopping moment are obtained.